

SAT-Lab: LENGUAJE DE ANALISIS ESTRUCTURAL

José A. Inaudi¹ y Juan Carlos De la Llera²

RESUMEN: Convencidos del valor de la computación como herramienta complementaria en la etapa de formación y el de la programación como componente imprescindible en la formación de ingenieros, se ha desarrollado una herramienta de análisis estructural con la visión de un lenguaje abierto más que de una herramienta computacional de producción convencional. SAT-Lab es un conjunto de funciones o lenguaje para el análisis estructural desarrollado en el ambiente de programación Matlab®. Es una herramienta muy útil para el aprendizaje, la enseñanza y la investigación de la estática y dinámica de estructuras y sistemas mecánicos. Este trabajo resume el alcance y principales características de SAT-Lab a través de ejemplos de análisis de estructuras isostáticas, análisis lineal y no lineal estático y dinámico de estructuras, y dinámica de sistemas continuos.

INTRODUCCIÓN

La complejidad de los problemas a los que se enfrenta un ingeniero en relación a infraestructura civil, y la consideración de acciones provenientes de desastres naturales o provocados por humanos, hace que muchas veces la única vía de estudio posible sea la simulación computacional. Existe en la actualidad un gran número de programas computacionales que ayudan a realizar esas simulaciones; sin embargo, se trata principalmente de programas de producción que no tienen en cuenta las dificultades y limitaciones de las personas que están iniciándose en el campo, como los estudiantes de ingeniería o ingenieros jóvenes. Por otra parte, los métodos numéricos y la simulación permiten llevar a cabo una enseñanza a través de proyectos, lo que fomenta una visión sistémica y abre posibilidades de aprendizaje por inducción.

En este artículo se describe una nueva herramienta computacional, denominada SAT-Lab, que está formada por un conjunto de funciones o lenguaje para el análisis estructural compatible con el ambiente de programación Matlab®. Si bien puede ser utilizado en el ámbito profesional, SAT-Lab está concebido principalmente como una herramienta de apoyo a la enseñanza y la investigación. SAT-Lab puede ser utilizado en programas de pregrado y postgrado de Ingeniería Civil o Mecánica, en la enseñanza de materias como estática, resistencia de materiales, análisis estructural lineal y no lineal, y dinámica de estructuras. Gracias a su estructura de programación modular, SAT-Lab permite al usuario incorporar sus propios desarrollos con facilidad. Esto es especialmente ventajoso en su aplicación como herramienta de apoyo a la investigación y en el aprendizaje de programación.

Matlab® (propiedad de Mathworks Inc.) es un ambiente de programación interactivo que resuelve, entre otros, problemas de análisis numérico, álgebra matricial y simbólica, análisis de señales, e integración de ecuaciones diferenciales. Matlab se utiliza en docencia y en investigación en ambientes universitarios, fundamentalmente en escuelas de ingeniería desde hace más de una década. Gracias a su esquema interactivo y lenguaje de programación simple, Matlab permite una rápida programación de rutinas (funciones) por parte del usuario para la solución de problemas específicos. De esta manera se han creado las denominadas cajas de herramientas (*toolboxes*), que se definen como conjunto de funciones que posibilitan la solución de problemas de distintas disciplinas. SAT-Lab es una caja de herramientas para el análisis estático y dinámico de sistemas estructurales y mecánicos. De este alcance deriva el acrónimo SAT que representa las iniciales de *Structural Analysis Toolbox*, el nombre en inglés de este desarrollo. El sufijo Lab hace referencia a las posibilidades que el lenguaje brinda como laboratorio virtual de análisis y simulación del comportamiento de modelos estructurales reales.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE SAT-LAB

SAT-Lab nació en 1992 bajo la denominación de INADEL como una herramienta para el análisis de estructuras civiles con aislamiento sísmico, estructuras con disipadores de energía y estructuras con comportamiento no lineal

¹ Departamento de Aeronáutica, F.C.E.F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Instituto Universitario Aeronáutico, Córdoba, Argentina.

² Departamento de Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

durante la investigación doctoral de los autores en la Universidad de California en Berkeley (Inaudi y De la Llera, 1992). La primera versión del programa con fines académicos fue terminada en 1995 bajo la denominación de MECANO. Desde entonces la herramienta ha sido utilizada como herramienta numérica de apoyo en la enseñanza de cursos de análisis estructural, dinámica de estructuras y diseño de sistemas de aislamiento sísmico y disipación de energía para la protección de estructuras dictados por los autores. A partir del uso en tareas de investigación, SAT-Lab plasmó distintos tópicos que han sido motivo de investigación de los autores. SAT-Lab es el nombre de la primera versión comercial de estas herramientas que está disponible en su versión 02S en español desde comienzos de 2003 (Inaudi y De la Llera, 2003).

Las funciones de SAT-Lab permiten realizar las siguientes tareas:

- Análisis de estructuras estáticamente determinadas
- Análisis estructural por el método de los desplazamientos
- Análisis dinámico de estructuras lineales
- Análisis estático de estructuras no-lineales
- Análisis dinámico de estructuras no-lineales
- Análisis dinámico de sistemas continuos

En su versión actual (SAT-Lab 02S), el programa está pensado para el análisis de estructuras tridimensionales con elementos de dos nodos, si bien el usuario puede incorporar elementos finitos más generales. Las tareas clásicas del análisis estructural incluyen una serie de pasos como son la definición de nodos y coordenadas, definición de grados de libertad y restricciones, definición de elementos con propiedades y conectividad, ensamble de matrices de ecuaciones de equilibrio, rigidez, masa y amortiguamiento, cálculo de desplazamientos, deformaciones, y esfuerzos en elementos, y visualización de configuraciones de la estructura deformada. SAT-Lab ofrece una serie de funciones que facilitan estas tareas.

A modo de ejemplo, se muestra a continuación el código en SAT-Lab del análisis estructural de un reticulado plano de tres nodos y tres barras. Las funciones en **negrita** son funciones de SAT-Lab. A continuación del símbolo % se comenta el significado del cálculo realizado en cada línea:

```
E = 2.1e4; G = E/2.6; % Propiedades mecánicas en ton/cm^2
A = 200; % Sección de las barras cm^2
XYZ=[0 0 0;300 0 0;150 0 150]; % Coordenadas nodales cm
DOFS =[0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;1 0 2 0 0 0]; % Grados de libertad
EDICT=fechasteleitos;% Dirección de elementos (Barra 1:distal a nodal)
EDICT.qualifier='IK';
PROPERTIES= [E A]; %Matriz de propiedades de elementos
ELEMENTS = [1 2 1 1;2 3 1 1;3 1 1 1];% Matriz de elementos
gpelem(XYZ,ELEMENTS); hold; % Gráfico de elementos
gpdofs(XYZ, DOFS,ELEMENTS); % Gráfico de grados de libertad
[K]=stkcm(XYZ,DOFS,ELEMENTS,PROPELEM,EDICT,'IK');%Ensamble de K
NLOADS=[2 0 0 -10 0 0 0]; % Carga vertical de 10 ton en nodo 2
[F]=ldnld2f(NLOADS,DOFS); % Ensamble cargas sobre grados de libertad
[y]=sesolve (K,P); % Solución del problema K y = F
[NDISP]=sendisp2 (y,DOFS); % Desplazamientos nodales
% Esfuerzos internos Fe: cálculo y graficación
[Fe,Ve,YLOCAL]=efmemf(NDISP,XYZ,DOFS,ELEMENTS,PROPERTIES,EDICT,'IK');
gpmemf(XYZ,ELEMENTS,Fe,YLOCAL);% Visualización de Esfuerzos Internos
[R]=efspr (XYZ,DOFS,Fe,YLOCAL); % Cálculo de reacciones
gpspr(XYZ,ELEMENTS,DOFS,R); % Visualización de reacciones
amp = 100; % Factor de amplificación para gráfico
DX = amp*NDISP(:,2);DY = amp*NDISP(:,3); DZ = amp*NDISP(:,4);
% Visualización de configuración deformada
gpdefst(XYZ,DX,DY,DZ,ELEMENTS,viewpoint,axdata);
```

La utilización de SAT-Lab supone que el usuario está familiarizado con la teoría del análisis estructural y el manejo de Matlab. El debe seleccionar las herramientas a utilizar en la construcción del modelo estructural y su análisis mediante la creación de un archivo que contiene una serie de comandos o acciones secuenciales a ejecutar como el ilustrado en el ejemplo. Si bien inicialmente esto puede sorprender al usuario acostumbrado a programas envasados con poderosos pre- y post-procesadores, estas características fueron creadas intencionalmente y reflejan una filosofía de

enseñanza que parte de la premisa que durante su aprendizaje, el alumno debe comprender a fondo las instancias, variables y procedimientos usados en la modelación e intervenir en toda instancia del análisis estructural. En SAT-Lab todas las variables utilizadas están a la vista y acceso por parte del usuario.

Vale la pena remarcar que esta herramienta, más que una herramienta de producción es un conjunto abierto de funciones (una librería) cuyo alcance y secuencia de uso son controlados por el usuario. Este reconocerá la facilidad con la que puede incorporar nuevas contribuciones al lenguaje.

ALCANCE DE LAS FUNCIONES DE SAT-LAB

SAT-Lab ofrece rutinas para la ejecución de tareas como:

- Definición de coordenadas nodales
- Definición de elementos estructurales
- Definición de grados de libertad, restricciones y desplazamientos esclavos
- Ensamble de matrices de rigidez, masa, y amortiguamiento
- Definición de cargas nodales y cargas en elementos
- Construcción de relaciones cinemáticas lineales
- Solución de problemas estáticos lineales con cargas y desplazamientos impuestos.
- Solución de problemas estáticos no lineales por métodos iterativos
- Integración de ecuaciones de movimiento y análisis de vibraciones lineales
- Integración de ecuaciones de movimiento de sistemas no lineales
- Cálculo de modos y frecuencias naturales de sistemas continuos
- Análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas lineales
- Modelos de amortiguamiento lineal viscoelástico
- Modelos no lineales de disipación (plasticidad, viscosidad)
- Herramientas de visualización de modelos, esfuerzos y deformaciones

En su versión actual, SAT-Lab consta de más de trescientas funciones en dos módulos: (i) Análisis estructural lineal (Módulo LA) y (ii) Análisis estructural no-lineal (Módulo NLA). A continuación se describe brevemente el alcance de las funciones provistas con SAT-Lab y se ilustran las capacidades disponibles mediante ejemplos desarrollados con esta herramienta.

Para mayor claridad se utiliza letra tipo Courier para indicar un comando o variable en Matlab o el nombre de una función de SAT-Lab nombrada en el texto. En este trabajo se omitirá el código de programación para privilegiar la exposición de los temas más que pueden abordarse. La mayoría de los detalles de la programación en lenguaje C++ de los manuales y tutoriales puede realizarse en el sitio www.sat-lab.com donde se encuentran un conjunto de ejemplos de interés.

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

El análisis de estructuras estáticamente determinadas consiste en el cálculo de esfuerzos internos en elementos estructurales y reacciones en apoyos para un patrón de cargas estáticas aplicadas. En este caso las condiciones de equilibrio son suficientes para determinar estos esfuerzos y por ende no se requiere especificar las propiedades constitutivas de los elementos estructurales.

En la enseñanza de la estática de estructuras resulta frecuente el uso de métodos gráficos de equilibrio nodal. Los eficientes métodos computacionales directos para la resolución de ecuaciones lineales disponibles en Matlab, brindan la posibilidad de analizar estructuras con un número significativo de elementos y sistemas estructurales de relevancia ensamblando las ecuaciones de equilibrio nodal de manera automática. Otra aplicación importante es el análisis de vinculación de una estructura. La detección o verificación de hiperestaticidad o isostaticidad antes de realizar un análisis es un aspecto de importancia. Las rutinas incluidas en SAT-Lab permiten realizar análisis estático de estructuras constituidas por elementos estructurales de dos nodos y distintos tipos de vínculos o apoyos.

Denominando **f** a los esfuerzos internos independientes de los elementos estructurales, **R** a las reacciones de los apoyos, y **P** a las componentes en las seis direcciones (fuerza y momento) de las cargas externas aplicadas en los nodos, las condiciones de equilibrio estático en estructuras constituidas por elementos rígidos pueden ser escritas como :

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \quad (1)$$

donde \mathbf{H} es la matriz que define las condiciones de equilibrio nodal y resulta del ensamble de las contribuciones al equilibrio de los esfuerzos de los elementos y de las reacciones de los apoyos. Dado el vector de cargas nodales \mathbf{P} , la solución de \mathbf{f} y \mathbf{R} consiste en la solución de un problema algebraico lineal estándar.

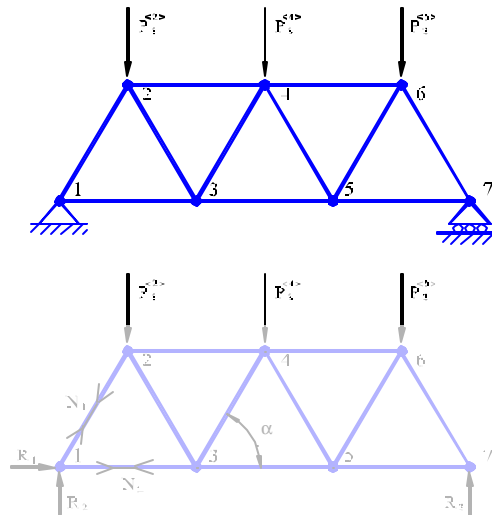


Figura 1. Análisis estático de un reticulado plano.

Por ejemplo, consideremos el reticulado plano de la Fig. 1. El vector de esfuerzos internos \mathbf{f} en este caso contiene los esfuerzos axiales N_i y el vector \mathbf{R} , las reacciones en apoyos R_j . Las ecuaciones de equilibrio nodal pueden expresarse como un sistema lineal de ecuaciones algebraicas con N_i y R_j como incógnitas. Por ejemplo, la primera ecuación de equilibrio, correspondiente a la dirección horizontal (x) del nodo 1, puede expresarse como:

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

donde $P_1^{<1>}$ representa la carga externa aplicada al nodo <1> en la dirección x (1).

En el formato de la ecuación 1, la ecuación 2 resulta:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \end{bmatrix} = P_1^{<1>} \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (3)$$

El vector fila de esta última ecuación es entonces la primera fila de la matriz \mathbf{H} .

El problema estático quedará determinado si la matriz \mathbf{H} resulta cuadrada y con rango completo. En estructuras tridimensionales con un número significativo de elementos, resulta relativamente complejo el análisis de isostaticidad por inspección visual. Para tal efecto puede analizarse el rango de la matriz \mathbf{H} construida automáticamente por las rutinas de SAT-Lab.

Ejemplo de análisis estático en SAT-Lab

La figura a continuación muestra los esfuerzos resultantes en un pórtico tridimensional empotrado en la base de la columna vertical y con cargas puntuales aplicadas en el punto más bajo de la viga oblicua analizado en SAT-Lab.

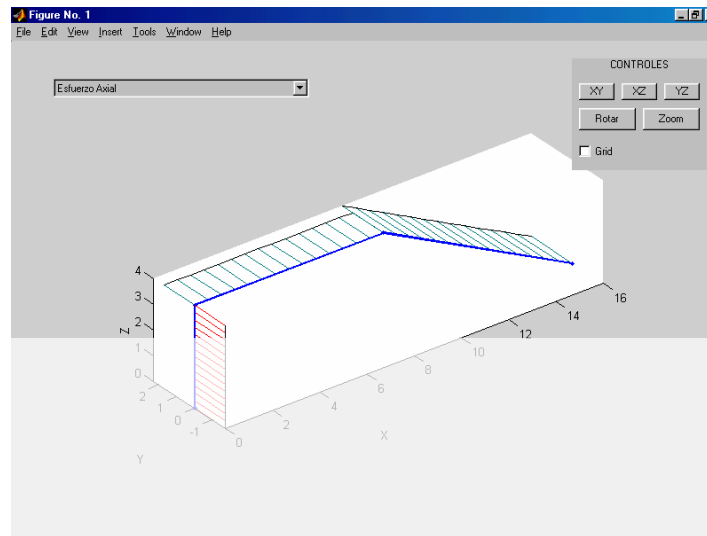


Figura 2: Diagramas de esfuerzos obtenidos a partir del análisis estático del pórtico

ANÁLISIS ESTRUCTURAL POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Los esfuerzos internos f de un elemento estructural se relacionan con las deformaciones v del mismo a través de la relación constitutiva. Las deformaciones de los elementos a su vez pueden ser expresadas como función de los grados de libertad de la estructura. En modelos de cinemática lineal, dicha relación puede expresarse mediante una matriz L_v como

$$v = L_v y \quad (4)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

La relación constitutiva en un elemento elástico lineal puede ser expresada como

$$f_i = k_i v_i \quad (5)$$

donde k_i es la matriz de rigidez del elemento.

La matriz de rigidez del modelo estructural se construye mediante el ensamble de las matrices de rigidez de los elementos de la estructura:

$$\sum_{i=1}^{N_e} L_i^T k_i L_i y = Ky = F \quad (6)$$

donde, la matriz de rigidez K de la estructura resulta entonces igual a la suma de las contribuciones de las rigideces de los elementos

$$K = \sum_{i=1}^{N_e} L_i^T k_i L_i = \sum_{i=1}^{N_e} K_i^e \quad (7)$$

y K_i^e es el aporte del elemento i a la matriz de rigidez de la estructura.

SAT-Lab incorpora varias funciones para realizar el ensamble de la matriz de rigidez. Algunas de éstas se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1: Funciones para ensamble de la matriz de rigidez.

Función	Propósito
stkcm	Ensamble de la matriz de rigidez
stkcm2	Ensamble de la matriz de rigidez en estructuras con desplazamientos nodales esclavos
stkcm1	Ensamble de matriz de rigidez mediante transformaciones cinemáticas L.
stconnet	Construcción de un modelo estructural a partir de subestructuras
stsubkc	Ensamble de la matriz de rigidez a partir de subestructuras con grados de libertad condensados

Una vez calculada la matriz de rigidez y obtenido el vector de cargas sobre los grados de libertad, la solución de las ecuaciones de equilibrio estático puede ser realizada por los métodos indicados en la Tabla 2. Conocidos los desplazamientos en la condición de equilibrio estático, se calculan los desplazamientos nodales. Estos desplazamientos permiten visualizar la estructura deformada y calcular tanto los esfuerzos internos en los elementos estructurales como las reacciones en los apoyos.

Tabla 2: Funciones para la solución del problema $K y = F$ y cálculo de desplazamientos nodales.

Función	Propósito
sesolve	Solución del problema estático con cargas en grados de libertad y/o desplazamientos impuestos
sekc	Condensación estática de la matriz de rigidez a un conjunto predefinido de grados de libertad
sesubs	Cálculo de desplazamientos nodales por el método de subestructuración
sendisp	Cálculo de desplazamientos nodales a partir de los desplazamientos en los grados de libertad
sendsub	Cálculo de desplazamientos nodales utilizando subestructuras

SAT-Lab ofrece funciones para la generación de las cargas nodales externas, cargas de vano en elementos, cálculo de cargas de empotramiento perfecto y ensamble del vector de carga sobre los grados de libertad de la estructura. No se detallan los nombres de las funciones por brevedad.

Para ilustrar el análisis de estructuras con cargas en los elementos, se considera una carga gravitatoria en el modelo de puente de la Figura 3. Los esfuerzos y las deformaciones de elementos calculadas se grafican en dicha figura. En el recuadro de la Figura 3, se muestra el diagrama de momentos flectores en la viga continua. El usuario puede además analizar en una pantalla adicional, el esfuerzo de interés en un elemento en particular.

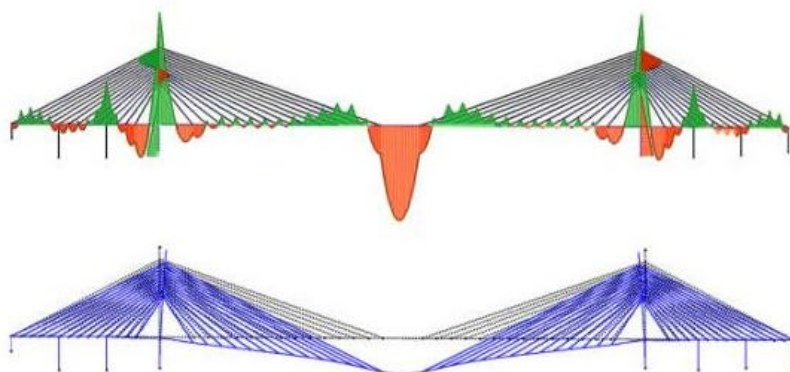


Figura 3: Deformada ampliada y diagramas de esfuerzos internos del puente.

ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS LINEALES

Modelos de sistemas MCK en segundo orden

SAT-Lab permite analizar problemas de vibraciones de modelos lineales caracterizados por la ecuación diferencial de segundo orden:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = L_w w(t) \quad (8)$$

con condiciones iniciales dadas.

Para el análisis de vibraciones lineales en el dominio del tiempo es posible utilizar análisis modal. Para determinar las formas modales en estructuras con amortiguamiento clásico se resuelve el problema de valores propios

$$[F - \omega^2 O] \Phi = 0 \quad (9)$$

en que F es la matriz de formas modales, y $O^2 = \text{diag}(\omega_i^2)$ es una matriz diagonal con el cuadrado de las frecuencias naturales en su diagonal. SAT-Lab tiene rutinas para el cálculo iterativo de los primeros o todos los modos de vibración de un modelo estructural (Fig. 4).

En modelos con amortiguamiento clásico, las N formas modales ϕ_n pueden ser utilizadas en este caso para desacoplar las ecuaciones diferenciales matriciales del movimiento en N ecuaciones escalares a través de la transformación de coordenadas

$$y = \Phi \cdot q \quad (10)$$

Las rutinas del tema vibraciones lineales de SAT-Lab permiten realizar análisis modal, integración en el tiempo de las ecuaciones de movimiento, construir matrices de amortiguamiento clásico y obtener un conjunto de vectores de Ritz-Lanczos para reducir el orden del sistema.

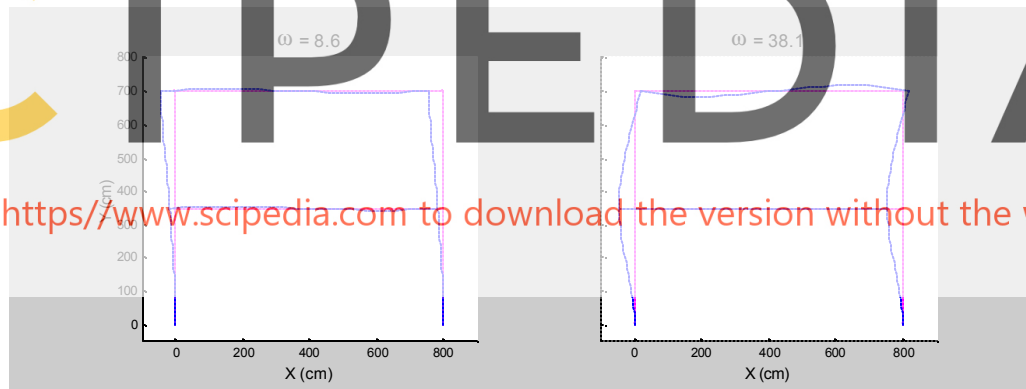


Figura 4: Modos de vibrar de un pórtico calculado y graficados con SAT-Lab.

El análisis en el dominio del tiempo puede también realizarse en espacio de estado, rescribiendo la ecuación diferencial en un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (11)$$

donde, A y B son las matrices del sistema y de influencia de la excitación, respectivamente, y se definen como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}L_w \end{bmatrix} \quad (12)$$

Estos modelos, disponibles en las rutinas de SAT-Lab, son especialmente útiles para el análisis de modelos lineales con amortiguamiento no clásico y modelos estructurales lineales con modelos de amortiguamiento viscoelástico.

Por ejemplo, la función de transferencia de la entrada $w(t)$ a la salida $y(t)$ es en notación en espacio de estado

$$H_{ml}(s) = D(m,:) (sI - A)^{-1} B(:,l) + E(m,l) \quad (13)$$

y se calcula como $[H] = \text{ssrf}(A, B, D, E, s, m, l)$ en SAT-Lab donde s es el vector de valores complejos de la variable compleja s (Laplace) para los que se desea evaluar la función de transferencia.

Análogamente la función de respuesta en frecuencia de la entrada $w(l)$ a la salida $y(m)$ es

$$H(j\omega) = D(m,:) (j\omega I - A)^{-1} B(:,l) + E(m,l) \quad (14)$$

y se calcula como $[H] = \text{ssfrf}(A, B, C, D, \omega, m, l)$ donde ω es el vector de frecuencias para el que se desea evaluar la función respuesta en frecuencia.

Análisis utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT)

La respuesta de un sistema lineal puede calcularse a partir de la relación entrada-salida en el dominio de la frecuencia, utilizando la transformada rápida de Fourier:

$$Y(j\omega) = H_{yw}(j\omega) W(j\omega) \quad (15)$$

donde $H_{yw}(j\omega)$ es la función de respuesta en frecuencia, $W(j\omega)$ es la transformada de Fourier de la excitación de entrada, e $Y(j\omega)$ es la transformada de la respuesta.

Este procedimiento de cálculo de la respuesta de un sistema lineal se realiza en SAT-Lab mediante las funciones `fafftmm` o `fafftsis` que utilizan las funciones `fft` e `ifft` de Matlab para la transformada rápida de Fourier y su inversa. Así, por ejemplo `[y]=fafftmm('Hyw',param,w,h)` calcula la respuesta de un sistema lineal cuya función de respuesta en frecuencia se especifica en la función `Hyw.m` definida por el usuario para el problema específico, w es la señal discreta de entrada, y h es el tiempo de muestreo de esta señal.

Viscoelasticidad lineal

Representación en espacio de estado

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Para modelar los sistemas viscoelásticos con Matlab se utiliza comúnmente la siguiente ecuación diferencial de la forma:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) + L^T f(t) = L_w w(t) \quad (16)$$

donde M , C , y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente; y $f(t)$ es el vector de fuerzas en los elementos lineales, esto es

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_z z(t) + B_z L \dot{y}(t) + E_z L y(t) \\ f(t) &= C_z z(t) \end{aligned} \quad (17)$$

Las matrices A_z , B_z , E_z y C_z caracterizan el modelo del material viscoelástico; $z(t)$ es el vector de estado de este modelo; y L es la transformación cinemática entre los grados de libertad de la estructura y las deformaciones v de los elementos viscoelásticos

$$v(t) = L y(t) \quad (18)$$

La representación en espacio de estado de un conjunto de elementos viscoelásticos se obtiene utilizando la función `vess`. Los elementos viscoelásticos a ensamblar mediante esta función deben tener una estructura como la siguiente: `[az,bz,ez,cz]=veelem(prop)` que a partir de un vector de propiedades `prop` calcula las matrices de la representación

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= a_z z(t) + b_z \dot{v}(t) + e_z v(t) \\ f(t) &= c_z z(t) \end{aligned} \quad (19)$$

Por ejemplo, el elemento viscoelástico vemaxwell define las matrices β_z, β_z y β_z para una cadena de elementos de Maxwell en paralelo caracterizados por distintos tiempos de relajación (Fig. 5). El usuario puede definir alternativamente otros modelos e incorporarlos al análisis.

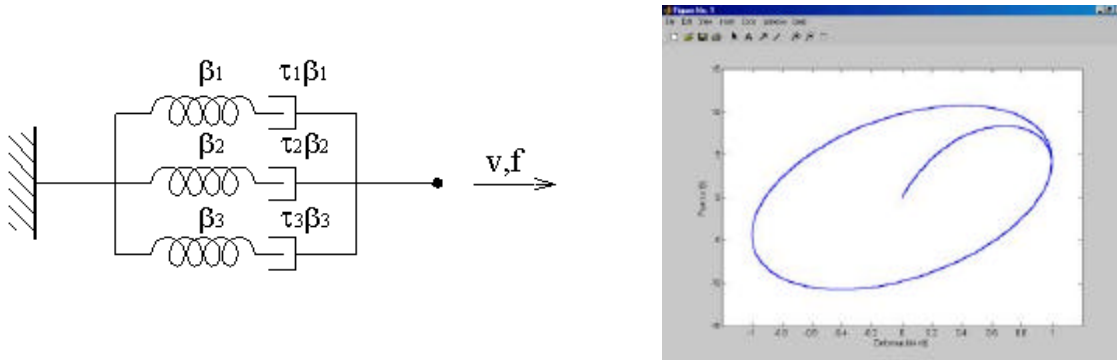


Figura 5: Modelo viscoelástico y ciclo de histéresis bajo deformación sinusoidal.

Las ecuaciones de movimiento de una estructura con disipadores viscoelásticos pueden escribirse como una ecuación de primer orden

$$\dot{x}_e(t) = A x_e(t) + B_w w(t), \text{ con} \quad (20)$$

$$A = \begin{bmatrix} O & I & O \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C & -M^{-1}L^T C_z \\ E_z L & B_z L & A_z \end{bmatrix} \quad B_w = \begin{bmatrix} O \\ M^{-1}L_w \\ O \end{bmatrix}$$

donde $x_e(t) = [y(t)^T \dot{y}(t)^T z(t_0)^T]^T$. Esta representación se obtiene con la función $[A, B_w] = \text{ssmck2ab}(M, C, K, L_w, A_z, B_z, E_z, C_z, L)$;

Una vez calculadas las matrices A y B_w , la respuesta de la estructura a una excitación arbitraria puede obtenerse usando la función de integración `ssintegr` de SAT-Lab que integra las ecuaciones diferenciales de un sistema lineal en espacio de estado (Inaudi et al., 1993; Inaudi y De la Llera, 1992).

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Representación en el dominio de la frecuencia

El comportamiento de un disipador viscoelástico lineal puede representarse en el dominio de la frecuencia mediante el módulo elástico $G'_j(\omega)$ o $G_s(j\omega)$ y el módulo de disipación $G''_j(\omega)$ (o $G_l(j\omega)$), tal que la fuerza y la deformación del disipador se relacionan como

$$F(j\omega) = (G_s(j\omega) + jG_l(j\omega))V(j\omega) \quad (21)$$

La rigidez dinámica del disipador $G(j\omega) = G_s(j\omega) + jG_l(j\omega)$ para varios modelos viscoelásticos se calcula mediante la función $[G] = \text{veelemf}(\text{param}, \text{ombar})$ donde `param` son los parámetros que caracterizan el modelo y `ombar` es el vector de frecuencias para el cual se desea calcular la rigidez dinámica $K(\omega)$ de un modelo estructural completo.

Cuando se utiliza este tipo de representación, la respuesta de la estructura puede obtenerse en el dominio de la frecuencia con `fafftsiso` o `fafftmimo`. El ensamble en frecuencia de la matriz de rigidez dinámica de un modelo estructural se realiza con las funciones `css1`, `css2`, y `css4`.

ANÁLISIS NO LINEAL ESTÁTICO DE ESTRUCTURAS

En ciertas ocasiones el comportamiento mecánico de ciertos elementos estructurales no puede ser representado mediante elementos elásticos lineales debido a constitutivas no lineales en los materiales o a efectos geométricos que resultan en relaciones cinemáticas no lineales. En estos casos, se utilizan modelos no lineales para analizar el comportamiento estructural.

En los modelos no lineales (con cinemática interna no lineal o constitutiva no lineal), las ecuaciones de equilibrio estático adoptan la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{y} + \mathbf{L}^T \mathbf{f} \quad (22)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de los componentes lineales en la estructura, y \mathbf{f} es el vector de esfuerzos en los elementos no lineales cuyas deformaciones son aún expresadas por la relación lineal

$$\mathbf{v} = \mathbf{L} \mathbf{y} \quad (23)$$

La relación constitutiva que permite expresar $\mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{z})$ implica que los esfuerzos internos en el elemento son una función de las deformaciones \mathbf{v} del elemento y de sus variables de estado \mathbf{z} (que existen sólo en casos de sistemas con memoria, como por ejemplo, en modelos elastoplásticos, viscoelásticos, entre otros).

Consecuentemente, la definición de un modelo con elementos con constitutivas no lineales y cinemática lineal requiere la definición de la matriz de transformación \mathbf{L} , y rutinas donde se definen (i) las fuerzas resistentes \mathbf{f} en función de las deformaciones \mathbf{v} y variables internas \mathbf{z} , (ii) las matrices de rigidez tangente del elemento no lineal \mathbf{k}_{ti} para su ensamblaje, y (iii) la evolución de las variables internas \mathbf{z} en función de los cambios en la deformación del elemento no lineal.

La matriz de rigidez tangente de la estructura para una configuración de deformación puede expresarse como:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \sum_{i=1}^{N_{en}} \mathbf{L}_i^T \mathbf{k}_{ti} \mathbf{L}_i \quad (24)$$

donde N_{en} es el número de elementos no lineales de la estructura, \mathbf{K} es la matriz de rigidez de los elementos lineales de la estructura y \mathbf{k}_{ti} es la matriz de rigidez tangente del i -ésimo elemento no lineal.

La solución de un problema estático no lineal puede ser encarada por distintos métodos iterativos de control de fuerza o desplazamiento. En el caso de control de fuerza se usa un proceso de corrección de errores de equilibrio y aproximación sucesiva de la relación constitutiva mediante la matriz de rigidez tangente de la estructura. El método avanza iterativamente hasta alcanzar la configuración de equilibrio (ver Figura 6)

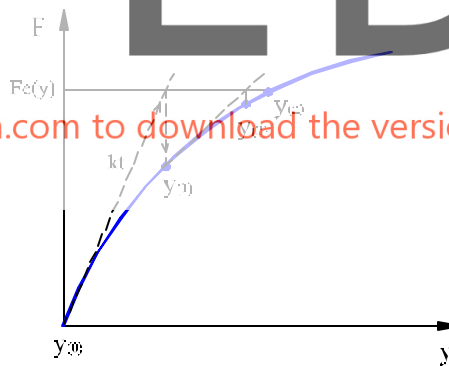


Figura 6: Método de Newton Raphson.

En SAT-Lab se utilizan distintas formulaciones para la solución de este problema estático, para construir matrices de relación cinemática y una librería de elementos para análisis estático no-lineal.

En los casos de cinemática no lineal y constitutivas lineales, el análisis estático puede realizarse mediante una formulación incremental similar a la utilizada para modelos no lineales con cinemática lineal. Algunas de las funciones disponibles en SAT-Lab para modelos elásticos con cinemática no lineal incluyen barras elásticas en grandes desplazamientos (engtruss) y estructuras de cables (encable, encablei).

Método incremental puro

Un método muy simple de análisis estático no lineal consiste en la aplicación sucesiva de incrementos de carga hasta completar la carga total. En cada paso se resuelve un sistema lineal con la matriz de rigidez tangente del modelo. En este procedimiento no existe ningún tipo de control de error, acumulándose en cada paso los errores anteriores resultantes de suponer constante la matriz de rigidez dentro de cada intervalo de carga. La precisión depende exclusivamente del número de intervalos de carga. La Tabla 3 describe algunas de las funciones disponibles.

Tabla 3: Solución de problemas estáticos no lineales.

Función	Propósito
nsincf	Solución de equilibrio estático de estructuras con elementos no lineales de varias deformaciones por método incremental e iterando en cada paso de carga con rigidez tangente.
nsincflv	Idem para elementos de una deformación.

Métodos incrementales con corrección

El método incremental con corrección surge de la combinación de los dos anteriores. La carga se aplica en etapas y en cada paso se itera hasta lograr convergencia. SAT-Lab dispone de varias implementaciones de este procedimiento (Tabla 4).

Tabla 4: Métodos de análisis estático incrementales con corrección.

Función	Propósito
nsincfc	Solución de equilibrio estático de estructuras con elementos no lineales por método incremental con corrección iterando con rigidez tangente.
nsincfei	Variante de nsincfc2 para problemas mal condicionados
nsincfcb	Variante de nsincfc2 con ciclo interno de Broyden.
nsincfcbi	Variante de nsincfc2 con ciclo interno de Broyden para problemas mal condicionados.

La ‘b’ en la terminación de las funciones indica que para el ciclo corrector interno se emplea el procedimiento de Broyden o quasi-Newton que no requiere el ensamble de la matriz de rigidez tangente en cada paso corrector; la ‘i’ señala una ligera modificación del algoritmo para tratar problemas mal condicionados.

Método de relajación

Como una alternativa a los procedimientos planteados anteriormente se presenta el método de relajación. Este permite encontrar la posición de equilibrio estático resolviendo un sistema dinámico cuya condición estacionaria es la solución del problema estático original. La función ndsode de SAT-Lab implementa esta técnica.

Para ilustrar este método resulta adecuado presentar un ejemplo de aplicación. El modelo estructural elegido consiste simplemente en un cable suspendido de dos soportes ubicados al mismo nivel. El mismo se modela con 10 elementos de cable elástico encable de igual longitud. En cada uno de los nodos internos se aplica una fuerza concentrada vertical (Figura 7).

En este ejemplo, varios de los valores propios de la matriz de rigidez tangente son nulos. Esta circunstancia implica una seria dificultad para los métodos incrementales expuestos con anterioridad, debido a que no es posible resolver los sistemas lineales que involucran a esta matriz en cada paso iterativo. Estos problemas no resultan tales en el método de relajación porque éste no requiere la inversión de la matriz de rigidez tangente. La solución obtenida se muestra en la siguiente figura:

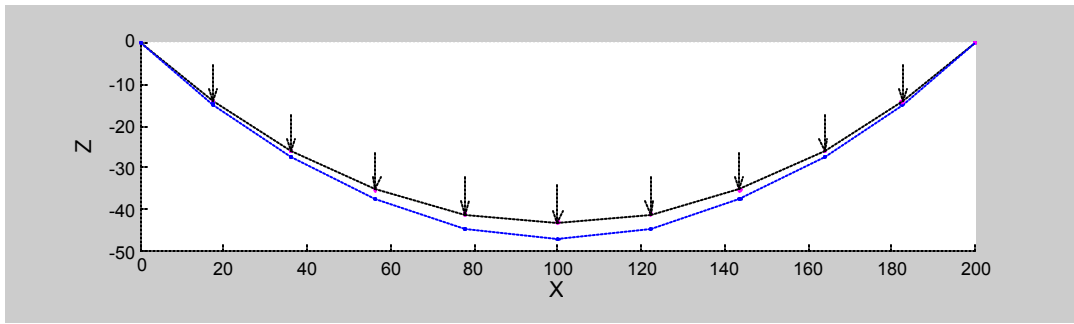
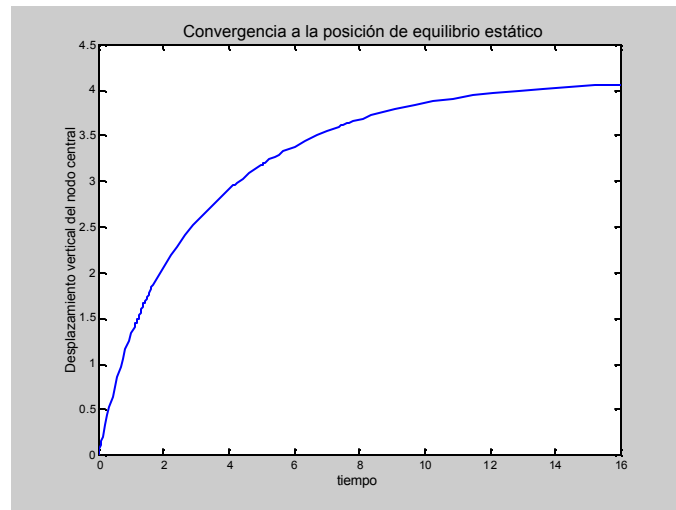


Figura 7: Deformada del cable suspendido de dos soportes.

Para concluir con este ejemplo se grafica el desplazamiento vertical del nodo central para apreciar la convergencia en el tiempo de la solución a la posición de equilibrio estático (Fig. 8).



**Figura 8: Convergencia del desplazamiento vertical del nodo central del cable.
Análisis estático con control de desplazamientos**

En ciertas ocasiones, el problema estático resulta de imponer desplazamientos en ciertos grados de libertad y cargas en otros. Este tipo de análisis se realiza con la función `nsincy`. Para problemas mal condicionados se dispone de la función `nsincy1`, la que se emplea de la misma manera.

Por ejemplo, consideremos el análisis de un modelo de dos barras elásticas en grandes desplazamientos a partir de la configuración inicial como el que se ilustra en línea punteada en la Figura 9. Se desea calcular la deformación y cargas requeridas para mover verticalmente hacia arriba el nodo central.

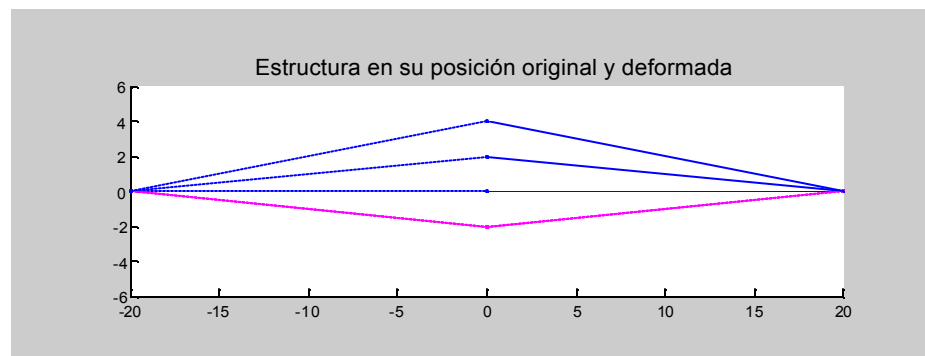


Figura 9: Análisis no lineal con control de desplazamientos de dos barras elásticas.

Con la aplicación de este desplazamiento la estructura pasa por dos posiciones en las que la fuerza resistente vertical es nula. La primera ocurre cuando las dos barras se alinean horizontalmente y la segunda cuando la estructura adopta la posición simétrica a la original respecto a la horizontal. La curva completa fuerza-desplazamiento se grafica en la Fig. 10.

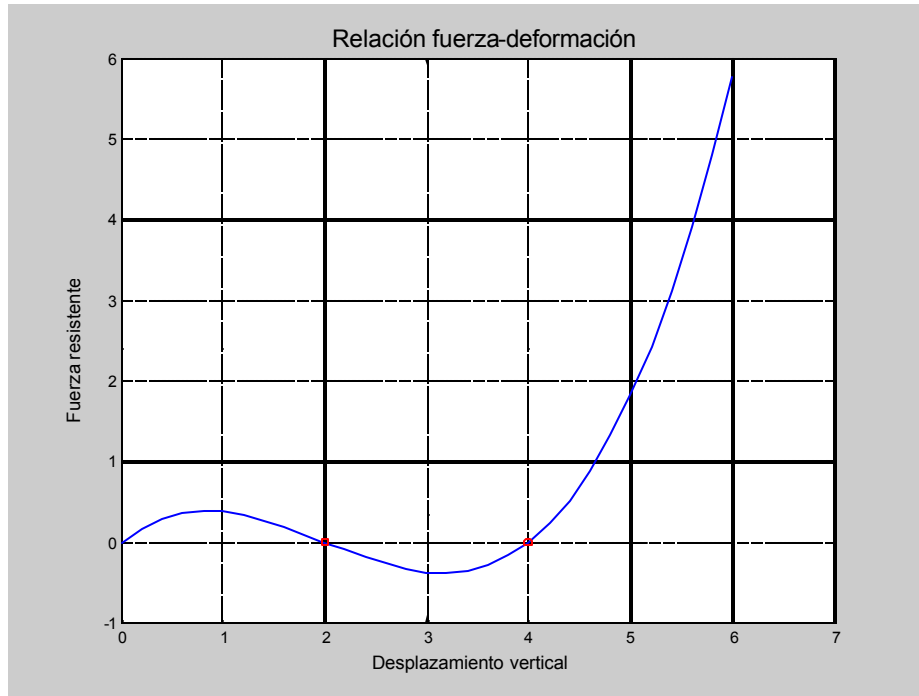


Figura 10: Relación fuerza-deformación del modelo no lineal de las barras elásticas de Fig. 9

ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS NO LINEALES

Los sistemas considerados (Fig. 11) quedan determinados por la siguiente ecuación de movimiento:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) + L^T f(t) = L_w w(t) \quad (25)$$

$$f(t) = f(Ly(t), L\dot{y}(t), z(t)) \quad (26)$$

donde **M**, **C** y **K** son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de los elementos lineales de la estructura (elementos que permanecen lineales durante la vibración); **L** es la matriz de transformación cinemática entre los grados de libertad **y(t)** y las deformaciones de los elementos no lineales; y **f(t)** es el vector de fuerzas en los elementos no lineales.

El vector de fuerzas **f** puede ser simplemente una función no lineal de la deformación y/o velocidad de deformación del elemento (por ejemplo un disipador viscoso no lineal `envisc1d`), o un operador diferencial o integral con variables internas como en el caso de un elemento elasto-plástico `enep1d` o viscoelástico. SAT-Lab incorpora un conjunto de modelos constitutivos no lineales frecuentemente propuestos para modelar disipadores de energía (Inaudi, 1993a, Inaudi, 1993b).

Como ejemplo de aplicación se muestran a continuación los dos primeros modos de vibración de una torre arriostrada a diferentes alturas (Fig. 12). Se realiza el análisis estático no lineal del modelo con cables extensibles y luego se calcula la matriz de rigidez tangente en posición de equilibrio estático para analizar las frecuencias naturales en pequeñas oscilaciones (Barberis, 2001).

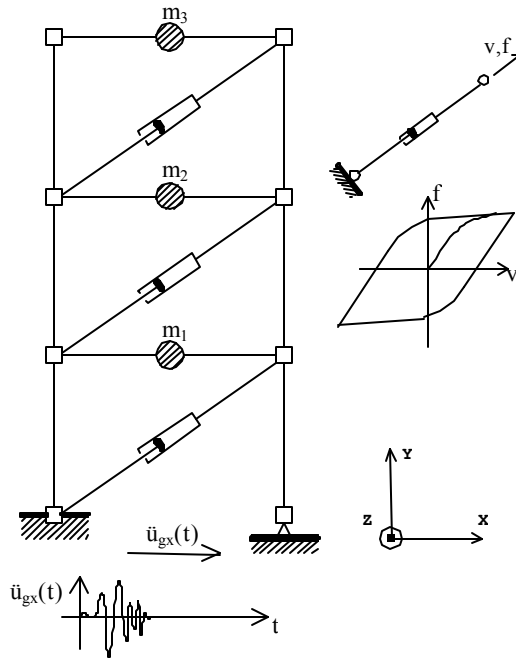


Figura 11: Modelo con elementos no lineales sujeto a excitación en su base.

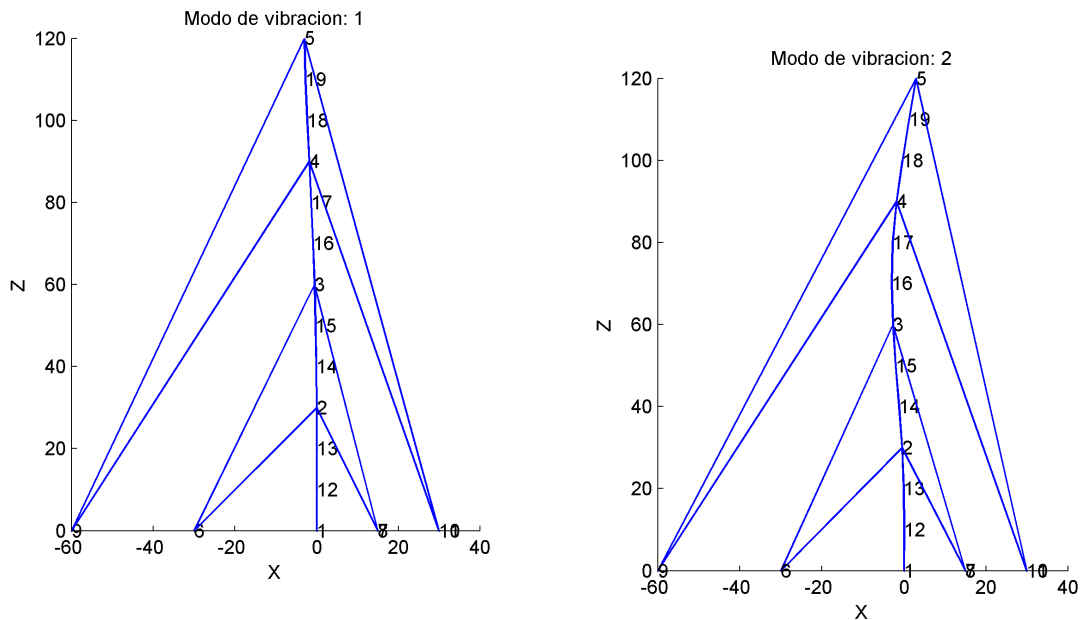


Figura 12: Modos de vibración de torre con cables.

Para análisis dinámico de modelos estructurales con cables en grandes desplazamientos se pueden usar las funciones de análisis dinámico no lineal. Por ejemplo, la función `ndode` resuelve tanto problemas parabólicos como hiperbólicos a través de la función `ode15s` de Matlab.

Otro ejemplo desarrollado con SAT-Lab usando elementos no lineales se ilustra en la Fig. 13. Se modela el comportamiento de un puente con un macroelemento friccional con interacción vertical que permite capturar los efectos de las variaciones de carga axial en el comportamiento mecánico de un sistema de aislamiento denominado péndulo friccional (Almazán et al., 1998).

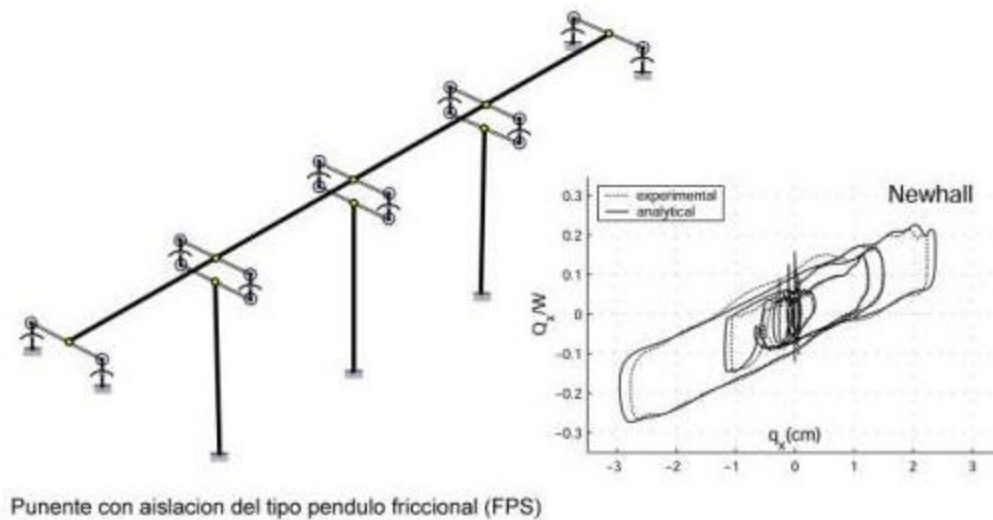


Figura 13: Modelo estructural y ciclo de histéresis de un elemento FPS.

PLASTICIDAD CONCENTRADA

Macro elementos rótula

Los elementos tipo rótula de SAT-Lab han sido creados con el objeto de modelar el comportamiento de elementos con constitutiva no lineal elastoplástica y estructuras que incluyen la interacción plástica entre las distintas componentes de esfuerzos y deformaciones.

El elemento plano posee dos componentes de deformación, digamos la deformación axial y el giro, o bien, la deformación lateral y la torsión de un piso completo. En el caso tridimensional se definen tres componentes de deformación, por ejemplo axial y giro según dos ejes (interacción $N - M_{xx} - M_{yy}$), o bien, la interacción de corte y torque en un piso ($V_x - V_y - T$). La distribución de esfuerzos y deformaciones a lo largo de este tipo de elementos es constante.

Macroelementos rótula con elasto-plasticidad perfecta

Estos elementos se definen mediante una matriz de rigidez y una superficie de fluencia. Se asume que la fluencia del elemento ocurre sobre la superficie siguiendo una ley de flujo asociado, respetando las condiciones cinemáticas en vértices, aristas, y caras de dicha superficie. Para el caso de estructuras, estas superficies se definen típicamente por las curvas de interacción de esfuerzos internos, por ejemplo, momento flector y esfuerzo axial. Sin embargo, las aplicaciones de este elemento son muy variadas, y llegan incluso hasta la modelación simplificada de edificios (De la Llera, 2000; Dides y De la Llera, 2003).

En comportamiento elástico, es decir para esfuerzos dentro de la superficie de fluencia, el incremento de fuerzas del elemento Δf debido a un incremento total de deformaciones Δv , compuesto por una componente elástica v^{el} y una plástica v^p , se obtiene mediante la rigidez elástica del macroelemento k^{el} , como

$$\Delta f = k^{el} \cdot \Delta v \quad (27)$$

Una vez que el elemento alcanza la superficie de fluencia, el incremento de fuerzas se evalúa asumiendo una regla de flujo asociado mediante la matriz de rigidez tangente elastoplástica k^{ep} ,

$$? \mathbf{f} = \mathbf{k}^{ep} \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \mathbf{k}_m^{ep} = \mathbf{k}^{el} - \frac{\mathbf{k}^{el} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)_m \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)_m^T \mathbf{k}^{el}}{\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)_m^T \mathbf{k}^{el} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right)_m} \quad (28)$$

donde $\Phi(\mathbf{F})$ representa la forma funcional de la curva de interacción y $(\partial\Phi/\partial\mathbf{F})_m$ representa el gradiente de la m-ésima cara de la superficie. Las condiciones especiales en que la respuesta cae sobre vértices y aristas, se considera con especial cuidado en el cálculo del incremento de deformación plástica.

Tabla 6: Elementos con superficie de interacción simples.

Función	Propósito
enep2v	Rótula elasto-plástica perfecta con interacción bidimensional
enep3v	Rótula elasto-plástica perfecta con interacción tridimensional

Como aplicaciones, y para facilitar el uso de estos elementos el usuario puede usar la función auxiliar fbmp2d, que permite generar la curva de interacción M – N para una sección arbitraria de acero u hormigón, y la función usstprop, que genera la superficie de interacción de corte y torque de un piso de un edificio en tres dimensiones $V_x - V_y - T$.

A modo de ejemplo se presenta en la Fig. 15, la superficie de interacción de cortes y torque para la estructura indicada en la Fig. 14 obtenida con las funciones de plasticidad concentrada de SAT-Lab.

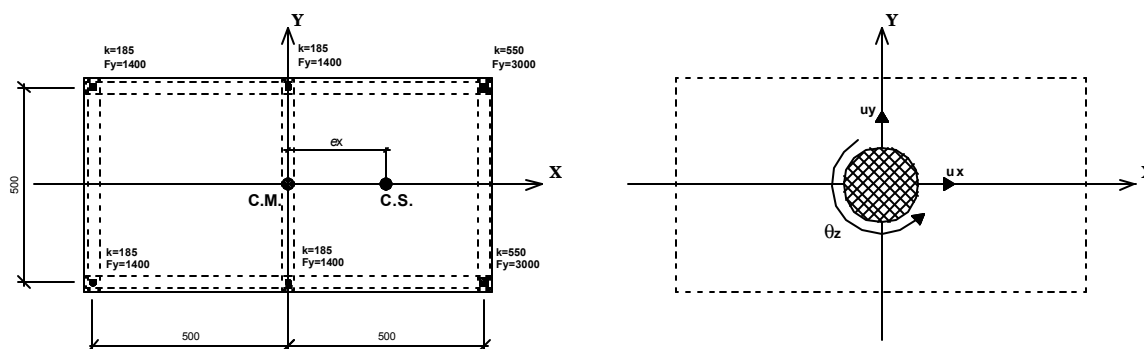


Figura 14: (a) Estructura asimétrica de un piso con 2 y 3 planos resistentes en las direcciones X e Y, respectivamente; (b) Macroelemento enep3v equivalente.

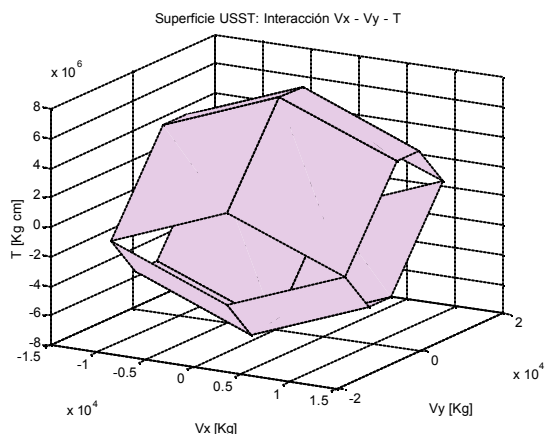


Figura 15: Superficie de fluencia $V_x - V_y - T$ (SST).

Macroelementos rótula con fibras

Estos elementos se usan para modelar un elemento discretizado en un conjunto de fibras unidimensionales (típicamente axiales, Fig. 16) de una cierta longitud L_f con constitutiva σ - ε . La constitutiva de la fibra puede ser arbitraria, usando cualquiera de los elementos no lineales disponibles en SAT-Lab, este modelo permite modelar comportamientos muy variados al nivel de la sección de un elemento.

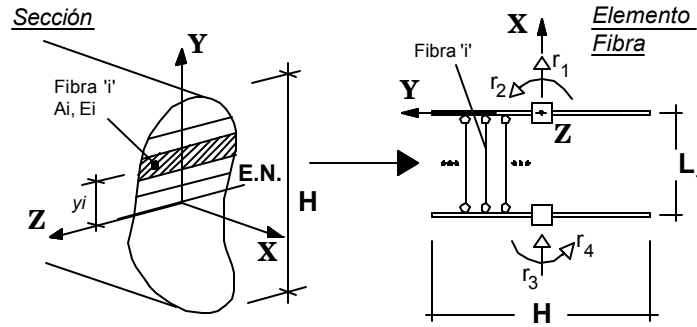


Figura 16: Discretización bidimensional de una sección monosimétrica

La definición de un macroelemento rótula bidimensional se presenta en la Fig. 17a. En este caso las fibras corresponden a dovelas de la sección. Como se observa, el elemento posee dos grados de libertad axiales y dos rotaciones en los extremos de la rótula. La extensión del macroelemento al caso tridimensional es directa mediante una discretización en ambas direcciones en el plano de la sección (Fig. 17b).

A diferencia del modelo de macroelemento rótula con comportamiento elasto-plástico perfecto, las rótulas tipo fibra permiten: (i) Una transición gradual entre el rango elástico y plástico de la sección, (ii) considerar la interacción entre los distintos esfuerzos, y (iii) evaluar en forma sencilla los esfuerzos en el elemento a partir de una integración sobre la sección.

Las ecuaciones de equilibrio axial y momento flector para la sección pueden escribirse:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A s_x(e) dA \approx \sum_{i=1}^{nf} s_i(e_i) A_i \\
 M_{yy} &= \int_A s_x(e) z dA \approx \sum_{i=1}^{nf} s_i(e_i) z_i A_i \\
 M_{zz} &= -\int_A s_x(e) y dA \approx -\sum_{i=1}^{nf} s_i(e_i) y_i A_i
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

SAT-Lab posee macroelementos rótula con fibras bi- y tri-dimensionales. El número de fibras y materiales constitutivos es arbitrario; sin embargo, el costo computacional crece en forma sustancial con el aumento del número de fibras no-lineales. Aunque cualquier elemento de una deformación de la librería de SAT-Lab puede ser utilizado para definir las fibras, o bien el usuario puede definir uno específico para su aplicación, se incluyen como ejemplo en este grupo de rutinas constitutivas, hormigón con y sin confinamiento (modelo de Park-Kent) y acero con constitutiva Menegotto-Pinto.

Tabla 6: Macroelementos rótula con fibras disponibles en SAT-Lab.

Función	Propósito
enfb2v	Rótula fibra bi-dimensional
enfb3v	Rótula fibra tridimensional

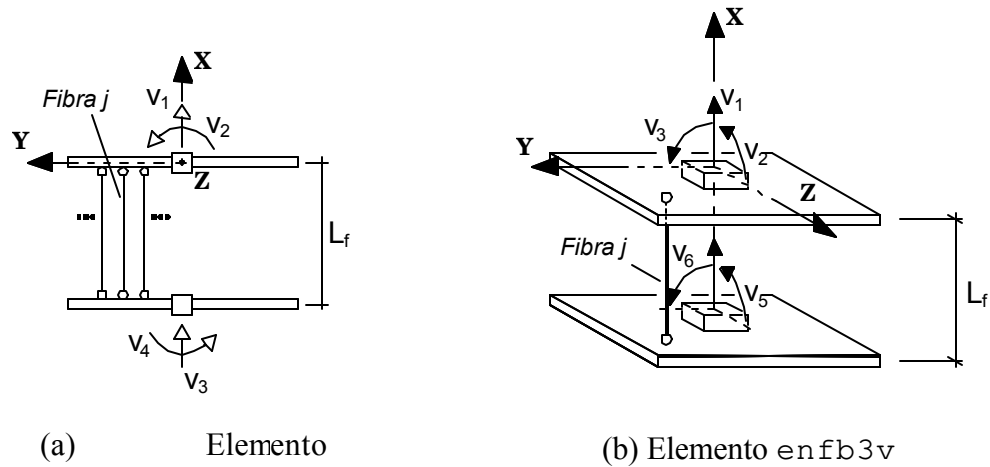


Figura 17: Macroelementos rótula con fibras.

Las fibras unidimensionales de hormigón y acero disponibles en SAT-Lab se detallan en la Tabla 7.

Tabla 7: Macroelementos rótula con fibras disponibles en SAT-Lab.

Función	Propósito
enrcpp	Fibra de hormigón de Kent–Park
enrcppt	Fibra de hormigón de Kent–Park (con tracción en el hormigón)
enmenpin	Fibra de acero Menegotto–Pinto
enmenpinsh	Fibra de acero de Menegotto–Pinto con endurecimiento isotrópico
enbl	Fibra bilineal

Se destaca el modelo de Kent y Park para elemento unidimensional de hormigón, enrcpp. Este modelo está basado en la envolvente $\sigma - \varepsilon$ monotónica en compresión de una fibra de hormigón. En este modelo se incluye el efecto del confinamiento del hormigón en la resistencia del elemento debido al refuerzo transversal. Para las fibras de acero se destaca una variante del formulado originalmente por Menegotto y Pinto, y permite una transición gradual entre la rigidez elástica inicial y la rigidez post-fluencia.

Macroelemento rótula

La generación de un macroelemento rótula en base a fibras requiere de la discretización de la sección en grupos de fibras de material i ($i = 1..m$), en que cada fibra j ($j = 1..n^{(i)}$) de material i tiene área $A_j^{(i)}$ y centro de gravedad $(y_j^{(i)}, z_j^{(i)})$.

Como esta discretización es una tarea laboriosa, SAT-Lab posee funciones para la discretización automática de secciones (Fig. 18). La función fbdiscg discretiza en fibras cualquier sección de acero u hormigón armado definida por rectángulos, mientras que la función fbdisco para secciones circulares.

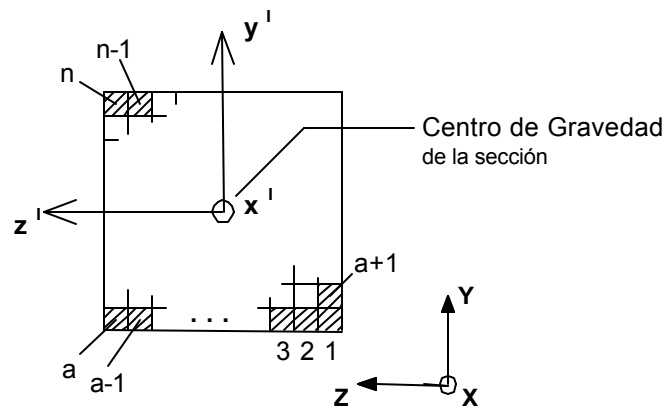


Figura 18: Discretización de una sección rectangular previa al cálculo de la superficie de interacción del modelo.

Macroelementos para pórticos

Los macroelementos rótula presentados en la sección anterior se utilizan como subelementos en la construcción de macroelementos de tipo columna y viga en dos y tres dimensiones. En la Figura 19 se presenta esquemáticamente el modelo de un elemento en que la plasticidad se concentra en sus extremos. Aunque a un costo computacional elevado, este elemento puede ser utilizado a su vez como subelemento para modelar plasticidad distribuida en estructuras de pórticos.

Este elemento consta de tres subelementos, dos rótulas inelásticas en sus extremos, y un elemento elástico de viga entre dichas rótulas. Sobre los nodos I y J se definen grados de libertad externos r_H que interactúan con el resto de la estructura. El modelo asume que existen fuerzas externas nulas actuando sobre los dos nodos internos definidos, y por lo tanto los grados de libertad asociados a estos nudos r_L , se conocen a partir de r_H .

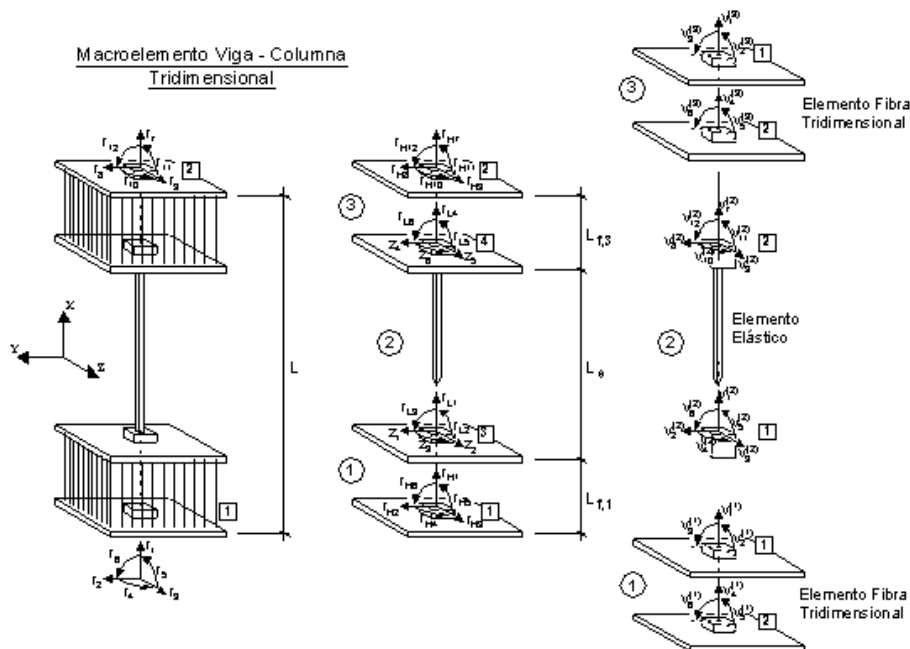


Figura 19: Modelo de columna para pórtico espacial con rótulas en extremos.

Los macroelementos rótula son indeformables en corte y transmiten este desplazamiento externo directamente al elemento elástico. A diferencia del elemento columna, se asume que el elemento viga es indeformable axialmente.

En la Tabla 8 se indican a continuación los seis macroelementos que posee SAT-Lab para la modelación de estructuras de pórticos planos y tridimensionales. Las tres últimas columnas de esta tabla indican el número de grados de libertad externos, internos y total que posee cada elemento.

Tabla 8: Macroelementos para pórticos planos y espaciales.	
Función	Propósito
enphc2d	Columna bidimensional con rótulas enep2v con dos deformaciones (p.e. interacción axial-momento flector)
enphb2d	Viga plana con rótulas unidimensionales de una deformación (p.e. momento-curvatura ($M_p-\phi$))
enfbc2d	Columna bidimensional con rótulas tipo fibra enfb2v que simulan la interacción axial-momento flector
enfbb2d	Viga plana con rótulas tipo fibra enfb2v que simulan la relación momento-curvatura ($M_p-\phi$)
enfbc3d	Columna tridimensional con rótulas tipo fibra enfb3v que simulan la interacción axial-momento flector
enfbb3d	Viga tridimensional con rótulas tipo fibra enfb3v que simulan la relación momento-curvatura ($M_p-\phi$)

Las funciones de plasticidad concentrada de SAT-Lab permiten modelar entonces estructuras aporticadas de hormigón armado y acero, calcular superficies de interacción (Fig. 20) y realizar análisis estático no lineal (pushover analysis) o dinámico paso a paso de estos modelos.

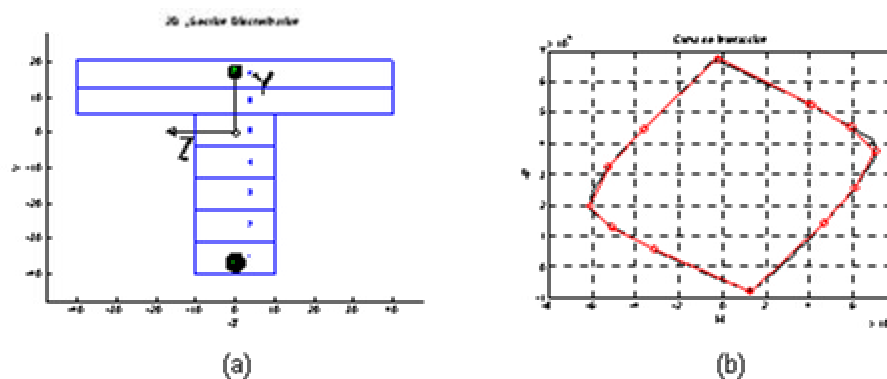


Figura 20: Discretización unidireccional de sección de hormigón armado y superficie de interacción.

ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS CONTINUOS

El análisis de modos de sistemas continuos mediante técnicas de separación de variables se incluye también en SAT-Lab. Estas técnicas permiten el cálculo de frecuencias naturales y modos de vibración de estructuras constituidas por elementos continuos de dos nodos tipo barra axial o viga de sección constante. La utilización de este tipo de funciones requiere la caja de Análisis Simbólico de Matlab si se desean resultados analíticos.

Como ejemplo de análisis modal, mediante separación de variables, consideremos dos barras axiales de sección constante empotradas en los extremos y unidas como se indica en la Figura 21.

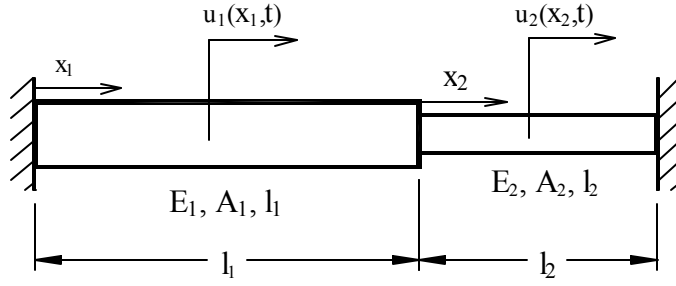


Figura 21: Gráfico de dos barras axiales de sección constante.

Las ecuaciones de movimiento de las barras son las siguientes:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial^2 t} - E_1 \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial^2 x_1} = 0 \quad (30)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial^2 t} - E_2 \frac{\partial^2 u_2(x_2, t)}{\partial^2 x_2} = 0 \quad (31)$$

donde ρ_i representa la densidad másica y E_i el módulo elástico longitudinal de cada barra. Las condiciones de contorno y compatibilidad de esta forma son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_1(0, t) &= 0 \\ u_2(l_2, t) &= 0 \\ E_1 A_1 \left. \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=l_1} &= E_2 A_2 \left. \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \\ u_1(l_1, t) &= u_2(0, t) \end{aligned} \quad (32)$$

El método de separación de variables propone:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= \phi_1(x_1)q_1(t) \\ u_2(x_2, t) &= \phi_2(x_2)q_2(t) \end{aligned} \quad (33)$$

Los funciones de forma en cada elemento correspondiente a un modo de vibración resultan entonces de la forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1) &= C_1^{(1)} \cos(\beta_1 x_1) + C_2^{(1)} \sin(\beta_1 x_1) \\ \phi_2(x_2) &= C_1^{(2)} \cos(\beta_2 x_2) + C_2^{(2)} \sin(\beta_2 x_2) \end{aligned} \quad (34)$$

La frecuencia natural de vibración puede obtenerse como

$$\omega = \beta_1 \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} = \beta_2 \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}} \quad (35)$$

Como las constantes β_i están relacionadas a través de la frecuencia natural, podemos expresar

$$\beta_2 = \beta_1 \sqrt{\frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2}} \quad (36)$$

Finalmente, el cálculo de los coeficientes C_{l2} de las formas modales y el coeficiente β_7 puede realizarse utilizando las condiciones de contorno. Lo que conduce al siguiente problema algebraico

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\beta_1 \sqrt{\frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2}} l_2\right) & \sin\left(\beta_1 \sqrt{\frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2}} l_2\right) \\ -E_1 A_1 \beta_1 \sin(\beta_1 l_1) & E_1 A_1 \beta_1 \cos(\beta_1 l_1) & 0 & E_2 A_2 \beta_1 \sqrt{\frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2}} \\ \cos(\beta_1 l_1) & \sin(\beta_1 l_1) & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \\ C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

La solución no trivial se obtiene calculando los valores de β_7 que anulan el determinante de la matriz de coeficientes. Las funciones de forma $\phi_1(x_1)$ y $\phi_2(x_2)$ en cada elemento que constituyen cada modo de vibración se obtienen calculando los valores de C no nulos que satisfacen la ecuación lineal homogénea para cada valor de β_7 obtenido.

Esta técnica de armado de la matriz de condiciones de contorno para un sistema estructural tridimensional con elementos continuos elásticos se desarrolla con las funciones disponibles en SAT-Lab (Matusevich, 2002). Las funciones permiten además realizar análisis modal y análisis en el dominio de la frecuencia de modelos continuos. La Tabla 9 describe los elementos continuos disponibles.

Tabla 9: Elementos continuos disponibles en SAT-Lab.

Función	Propósito
cstruss	Condiciones de borde de barra tridimensional en vibración axial
csbeam	Condiciones de borde de viga recta tridimensional en vibración transversal
csshaft	Condiciones de borde de barra tridimensional en vibración torsional

COMENTARIOS FINALES Y FUTUROS DESARROLLOS

SAT-Lab pretende ser una contribución a la didáctica en la ingeniería estructural y mecánica, un lenguaje que irá incorporando diversos aspectos del análisis estructural, la dinámica de estructuras y mecanismos, el comportamiento y el diseño estructural; una herramienta en la cual el principal protagonista es el usuario, quien define el alcance de aplicación de la misma. SAT-Lab es el fruto del entusiasmo que los autores han mantenido por la docencia y la investigación, y un símbolo de la voluntad de colaboración entre chilenos y argentinos. La primera versión comercial de este producto se ha producido en castellano en agradecimiento a las universidades de origen de los autores.

SAT-Lab ha sido y es actualmente utilizado por los autores en la enseñanza universitaria de cursos de pre- y postgrado en las áreas de análisis y dinámica de estructuras, incluyendo sistemas de reducción de vibraciones, como herramienta de simulación y apoyo a la docencia. Los autores deben confesar que el desarrollo de esta herramienta ha permitido disfrutar de la enseñanza e investigación realizada durante estos años, y reconocen en ella un mecanismo de aprendizaje permanente.

SAT-Lab es un proyecto de largo plazo, por lo que crecerá en alcance, calidad y aplicaciones bajo la dirección de los autores originales y con el valioso aporte de estudiantes, docentes, e investigadores. SAT-Lab continuará integrando disciplinas bajo la misma filosofía. En próximas versiones se incorporarán funciones para el análisis mediante elementos finitos de problemas de mecánica de los sólidos y flujo de calor (Vanella, 2003), grandes desplazamientos y plasticidad (Buzeta, 2003). Otra línea que se incorporará en el mediano plazo son herramientas para el diseño de elementos de acero y hormigón armado en la construcción de estructuras civiles (Dides y De la Llera, 2003), como así también funciones para la enseñanza de cinemática de cuerpos rígidos y mecanismos.

Agradecimientos

Desde 1995, numerosos alumnos han aprendido dinámica estructural con SAT-Lab y la han utilizado para desarrollar su investigación en tesis de maestría y doctorado. Además, algunos de ellos han brindado generosamente su esfuerzo en etapas de verificación, programación, edición de manuales, y construcción de ejemplos. Sin su apoyo, el lanzamiento de esta herramienta habría sido muy difícil. En particular queremos hacer expreso nuestro agradecimiento a Marcos Barberis, Ariel Matusevich, Griselda Jeandrevin, Julio Pinochet, Rodrigo Ortiz, Maurice Dides, Cristóbal Binignat, Oscar Buzeta, Juan Pablo Cáceres, Daniel Hurtado, Mario Alvarez y Thomas Fischer. Tres instituciones han apoyado durante la última etapa de este desarrollo: la Pontificia Universidad Católica de Chile, el Instituto Universitario

Aeronáutico de Córdoba y la Universidad Nacional de Córdoba, instituciones donde los autores trabajan como docentes en las disciplinas de análisis estructural y dinámica de estructuras.

REFERENCIAS

- Almazán, J.L., De la Llera, J.C. e Inaudi, J.A., (1998). "Modeling aspects of structures isolated with the frictional pendulum system", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 27, 845-867.
- Barberis, M., (2001). "Análisis Estructural de Cables: Herramienta Computacional y Aplicaciones", Trabajo Final, Escuela de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.
- Buzeta, O., (2003). "Análisis estático de estructuras con grandes desplazamientos y constitutivas no lineales utilizando elementos finitos", Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Ingeniería, Tesis de Magister.
- De la Llera, J.C. e Inaudi, J. A., (1995). "Evaluating the earthquake performance of base isolated buildings using recorded motions", International Post-SMiRT Conference Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Active Control of Vibrations of Structures, Santiago, Chile.
- De la Llera J. C., (2000). "A macroelement model for inelastic building analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, 1725-1757.
- De la Llera, J.C., Inaudi, J. A. y Luders, C., (1998). SIRVE: Análisis y Diseño de Sistemas de Aislamiento Sísmico y Disipación de Energía, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile, Chile.
- Dides, M. y De la Llera J. C., (2003). "A comparative study of concentrated plasticity models in dynamic analysis of buildings". *Engineering Structures* (enviado para publicación).
- Inaudi, J.A., Zambrano, A. y Kelly, J.M., (1993). "On the analysis of structures with viscoelastic dampers, Report No. UCB/EERC-93/06, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, California.
- Inaudi, J.A., Nims, D.K. y Kelly, J.M., (1993). "On the analysis of structures with energy dissipating restraints", Report No. UCB-EERC-93/13, Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley, California.
- Inaudi, J. A. y De la Llera, J.C., (2002). "Dynamic analysis of nonlinear structures using state-space formulation and partitioned integration schemes", UCB/EERC-92/18, Earthquake Engineering Research Center, University of California.
- Inaudi, J. A. y De la Llera, J.C., (2003). SAT-Lab v. 02S Manual de Usuario y Manual de Referencia, www.sat-lab.com.
- Matusevich, A., (2002). "Desarrollo Computacional del Análisis Modal de Sistemas Continuos". Trabajo Final, Escuela de Ingeniería Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.
- Vanella, M., (2003). "Herramientas Computacionales para la Mecánica de Sólidos y Transferencia de Calor basadas en el Método de Elementos Finitos". Trabajo Final, Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.